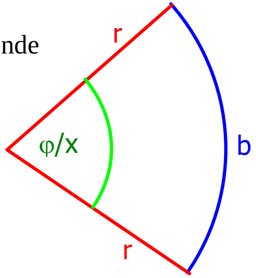
1 Berechnungen am Kreis

1.1 Bogenmaß



Das Bogenmaß x ist das zu φ gehörende Verhältnis $\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$, also die Zahl

$$x = \frac{b}{r} = \frac{\varphi\pi}{180°}$$

Umrechnungen:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π

1.2 Kreisteile

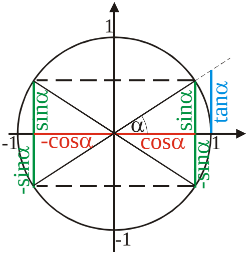
Sektorfläche: $A = \frac{r^2\pi\varphi}{360°}$

oder $A = \frac{rb}{2}$

1.3 Kugel

Volumen $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ Oberflächeninhalt $O = 4r^2\pi$

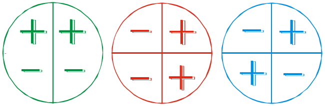
2 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis



Sinus, Kosinus und Tangens beliebiger Winkel

Für die Vorzeichen gilt

Sinus Kosinus Tangens



Für **negative Winkel** (im Uhrzeigersinn) gilt:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Bsp.:

$$sin150° = sin(180° - 150°) = sin30° = \tfrac{1}{2}$$

$$tan300° = -tan(360° - 300°) = -tan60° = -\sqrt{3}$$

$$sin\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \alpha_1 = 45° \text{ und } \alpha_2 = 180° - 45° = 135°$$

3 Trigonometrie am allgemeinen Dreieck

3.1 Sinussatz

In einem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{usw.}$$

3.2 Kosinussatz

In jedem Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{usw.}$$

Sonderfall: Satz des Pythagoras, falls der Winkel 90° hat.

Der Kosinussatz liefert den Winkel eindeutig, der Sinussatz nicht.

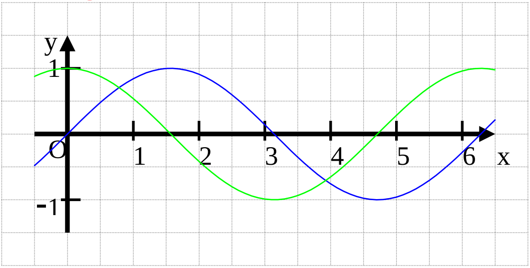
Bsp.: Das Dreieck mit a=6cm, b=4,5cm und α=62° ist nach SsW eindeutig. Aus dem Sinussatz ergibt sich

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{4{,}5cm\cdot\sin 62^\circ}{6cm} \approx 0{,}6622$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 41{,}5^\circ \text{ und } \beta_2 = 180^\circ - 41{,}5^\circ = 138{,}5^\circ$$

β_2 scheidet aus, weil im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegen muss. Die Überprüfung mit der Innenwinkelsumme liefert dieselbe Entscheidung.

4 Trigonometrische Funktionen

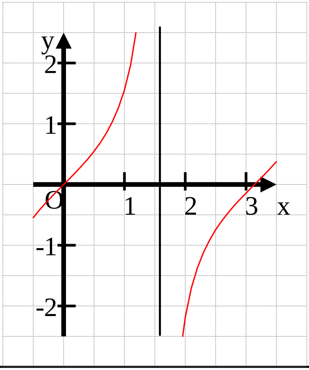


Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

punktsymmetrisch zu (0/0); Periodenlänge 2π; $W_f = [-1;1]$

Kosinusfunktion $f(x) = \cos x$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

achsensymmetrisch zur y-Achse; Periodenlänge 2π; $W_f = [-1;1]$



Tangensfunktion $f(x) = \tan x$

mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{(2z+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

punktsymmetrisch zu (0/0); Periodenlänge π; $W_f = \mathbb{R}$

Die allgemeine Sinusfunktion

$$f(x) = a\sin[b(x+c)]+d \quad \text{mit}\, a,b \neq 0 \quad \text{Periode}\,\frac{2\pi}{|b|}$$

a: Streckung oder Stauchung in y-Richtung
b: Streckung oder Stauchung in x-Richtung
c: Verschiebung nach rechts (c < 0) oder links (c > 0)
d: Verschiebung nach oben (d > 0) oder unten (d < 0)

5 Exponentialfunktion

5.1 Exponentielles Wachstum

Ist die Änderung pro Zeiteinheit direkt proportional zum aktuellen Bestand, so liegt ein exponentielles Wachstum oder eine exponentielle Abnahme vor. (x im Exponenten)

Wachstumsgesetz $\boxed{y = b \cdot a^x}$

b: Anfangswert
a: Wachstumsfaktor oder Abnahmefaktor
a>1 exponentielle Zunahme,
0<a<1 exponentielle Abnahme

5.2 Exponentialfunktionen

$y = a^x \quad a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$

$W = \mathbb{R}^+$

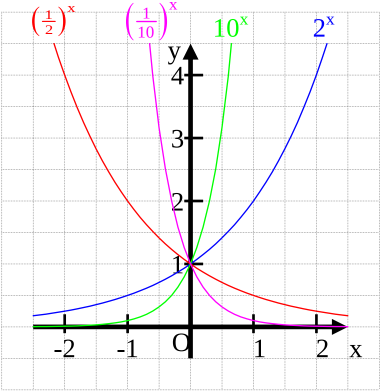
streng monoton steigend für a>1

streng monoton fallend für 0<a<1

Die Graphen von

$y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

sind zueinander symmetrisch bzgl. der y-Achse.



6 Logarithmus

Ist $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $\mathbf{b^x = a}$, so heißt der Exponent **x** der **Logarithmus von a zur Basis b**: $x = \log_b a$.

($\log_b a$ ist diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \log_b 1 = 0; & \log_b b = 1 \\ \log_b b^x = x; & b^{\log_b x} = x \end{array}}$$

6.1 Rechnen mit Logarithmen

$$\boxed{\begin{aligned}&\log_b(u\cdot v)=\log_b u+\log_b v\\&\log_b(u:v)=\log_b u-\log_b v\\&\log_b u^z=z\cdot\log_b u\end{aligned}}$$

$(b,u,v\in\mathbb{R}^+,\ b\neq 1,\ z\in\mathbb{R})$

$$2\cdot\log_b x+3\log_b y-\log_b z=\log_b\frac{x^2y^3}{z}$$

$$\log_b\frac{\sqrt{b}}{a^4}=\frac{1}{2}\log_b b-4\log_b a=\frac{1}{2}-4\log_b a$$

Basisumrechnung: $\boxed{\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$

Zehnerlogarithmus: Schreibweise: $\lg x:=\log_{10} x$

Praxis: Auf dem TR ist die Zehnerlogarithmus-Taste mit $\boxed{\log}$ beschriftet!

Näherungsweises Berechnen von Logarithmen mit beliebiger Basis auf dem TR z.B. $\log_2 5=\dfrac{\log 5}{\log 2}\approx 2{,}3219$

6.2 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Variable im Exponenten – Lösungsprinzip –

$$2^x = 3^{2x-1} \quad | \text{logarithmieren}$$

$$\lg 2^x = \lg 3^{2x-1}$$

$$x \lg 2 = (2x-1)\lg 3 \quad \text{nach } x \text{ auflösen}$$

$$x \lg 2 = 2x \lg 3 - \lg 3$$

$$x \lg 2 - 2x \lg 3 = -\lg 3$$

$$x(\lg 2 - 2\lg 3) = -\lg 3$$

$$x = \frac{-\lg 3}{\lg 2 - 2\lg 3}$$

Variable im Logarithmus – Lösungsprinzip –

$$\log_5(2x+1) = 3 \quad |\text{delogarithmieren}$$

$$5^3 = 2x+1$$

$$x = 62$$

7 Ganzrationale Funktionen

Ein Term der Form

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_0 \ldots a_n \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$

heißt **Polynom n-ten Grades**.

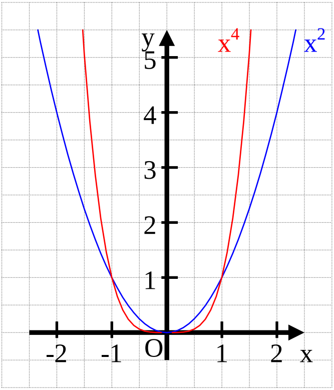
Eine Funktion der Form

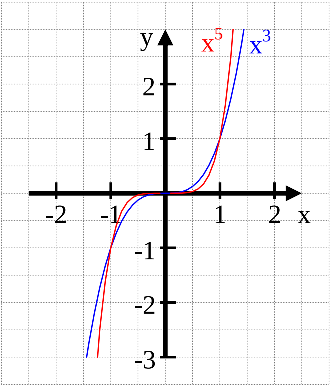
$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_0 \ldots a_n \in \mathbb{R}; a_n \neq 0$

mit $D_f = \mathbb{R}$ **heißt ganzrationale Funktion n-ten Grades**.

7.1 Potenzfunktionen

Jede Funktion **$f(x) = x^n$** mit $D_f = \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt **Potenzfunktion** mit natürlichem Exponenten.





n gerade	n ungerade
$W_f = \mathbb{R}_0^+$	$W_f = \mathbb{R}$
achsensymmetrisch zur y Achse	punktsymmetrisch zu (0|0)
gemeinsam (–1|1), (0|0), (1|1)	gemeinsam (–1|–1), (0|0), (1|1)

7.2 Polynomdivision

$(6x^3):(3x)=$

$$\left(6x^3+16x^2-7x-10\right):(3x+2)=\boxed{2x^2}+\boxed{4x}-5$$

$$\begin{array}{l}
-(6x^3+4x^2) \qquad (3x+2)\cdot 2x^2 \\
\hline
\quad 12x^2-7x \qquad (12x^2):(3x)= \\
\quad -(12x^2+8x) \\
\hline
\qquad -15x-10 \\
\qquad -(-15x-10) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

usw.

7.3 Nullstellen

f ist eine ganzrationale Funktion n-ten Grades.

- Dann hat sie höchstens n Nullstellen.
- Ist $x = a$ Nullstelle von f, so gilt $f(x) = (x-a)\cdot g(x)$ mit Grad $g(x) = n-1$.

7.4 Grenzwert

Unterscheiden sich die Funktionswerte von f(x) für $x \to \infty$ bzw. $x\to -\infty$ beliebig wenig von der Zahl a, so **konvergiert** f(x) gegen den Grenzwert a.

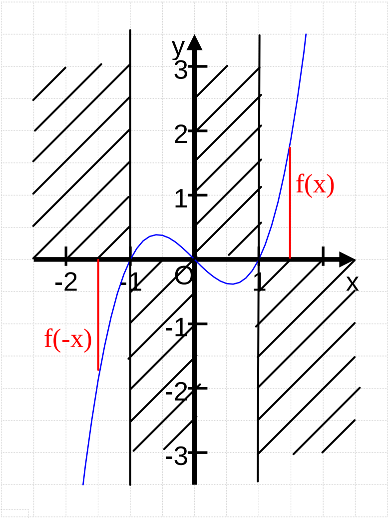
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$

7.5 Felder abstreichen

$f(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$

NST $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

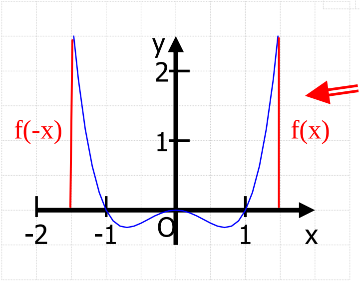
		–1		0		1	
x	–		–		+		+
x+1	–		+		+		+
x-1	–		–		–		+
f(x)	–		+		–		+



7.6 Symmetrie

f(-x) = –f(x)

Graph **punktsymmetrisch** zu **(0|0).**



f(-x) = f(x)

Graph **achsensymmetrisch** zur **y-Achse**

8 Zusammengesetzte Zufallsexperimente

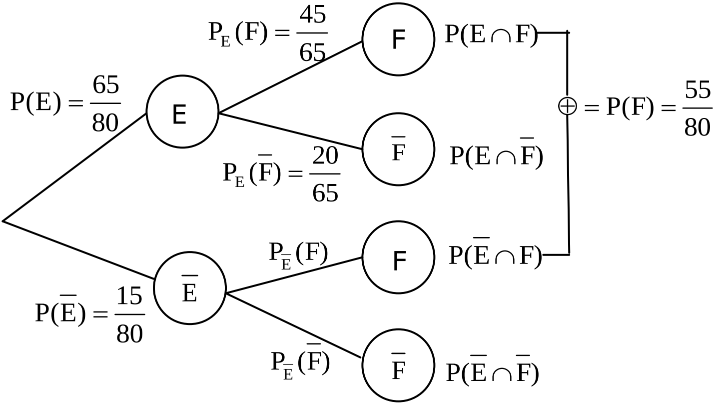
8.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{\mathbf{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}}$$

heißt für $P(B) \neq 0$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung B.

oder Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist, *oder* Wahrscheinlichkeit von A im Ergebnisraum B.

Bsp.: Bei einer Befragung von 80 Personen geben 65 an Englisch und 55 Französisch zu sprechen. Von denen die Englisch sprechen, sprechen 45 auch Französisch.



a) P(„nur F“) = $P(\overline{E}\cap F)=P(F)-P(E\cap F)=\frac{55}{80}-\frac{65}{80}\cdot\frac{45}{65}=\frac{10}{80}$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit spricht unter denen, die kein Englisch sprechen, jemand Französisch?

$$P_{\overline{E}}(F)=\frac{P(\overline{E}\cap F)}{P(\overline{E})}=\frac{\frac{10}{80}}{\frac{15}{80}}=\frac{10}{15};$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit spricht unter denen, die kein Englisch sprechen, jemand auch kein Französisch?

$$P_{\overline{E}}(\overline{F})=1-\frac{10}{15}=\frac{5}{15}$$

d) P(„keine der beiden Sprachen“) = $P(\overline{E}\cap\overline{F})=P(\overline{E})\cdot P_{\overline{E}}(\overline{F})=\frac{5}{80}$

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit spricht unter denen, die Französisch sprechen, jemand auch Englisch?

$$P_F(E)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{65}{80}\cdot\frac{45}{65}}{\frac{55}{80}}=\frac{45}{55}$$

Lösung der Aufgaben mit der Vierfeldertafel

(Nur anwendbar bei zwei Ereignissen)

8.2 Vierfeldertafel

Vierfeldertafel mit der **absoluten Häufigkeit**.

+	E	$\overline{E}$	Gesamt
F	**45**	10	**55**
$\overline{F}$	20	5	25
Gesamt	**65**	15	**80**

a) *10 sprechen nur Französisch.* P(„nur F“) = $\frac{10}{80}$

b) $P_{\overline{E}}(F) = \frac{10}{15}$

c) $P_{\overline{E}}(\overline{F}) = \frac{5}{15}$

d) $P(\overline{E} \cap \overline{F}) = \frac{5}{80}$

e) $P_F(E) = \frac{45}{55}$

Vierfeldertafel mit der **Wahrscheinlichkeit**.

+	E	$\overline{E}$	Gesamt
F	$\frac{45}{80}$	$\frac{10}{80}$	$\frac{55}{80}$
$\overline{F}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{5}{80}$	$\frac{25}{80}$
Gesamt	$\frac{65}{80}$	$\frac{15}{80}$	**1**