1 Zahlen

1.1 Die Quadratwurzel

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist die nicht negative Lösung der Gleichung

$x^2 = a. \qquad a \geq 0$

$\sqrt{0} = 0$

a heißt **Radikand**

Ein Teil der Quadratwurzeln sind **rationale** Zahlen

(z.B. $\sqrt{9}, \sqrt{0{,}04}$ oder $\sqrt{\frac{4}{9}}$),

andere dagegen **irrationale** Zahlen (z. B. $\sqrt{2}, \sqrt{0{,}4}$ oder $\sqrt{\frac{5}{9}}$).

Die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen** Zahlen umfasst alle rationalen und irrationalen Zahlen.

1.2 Rechnen mit Quadratwurzeln

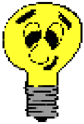
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a;\ a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ falls } a \geq 0 \\ -a, \text{ falls } a < 0 \end{cases}; \quad a \text{ beliebig}$

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $a, b \geq 0$
- $\sqrt{a : b} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$; $\begin{matrix} a \geq 0 \\ b > 0 \end{matrix}$
- **aber:** $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Teilweises Radizieren

Zerlege den Radikand in ein Produkt, so dass ein Faktor eine Quadratzahl ist. Beispiele:

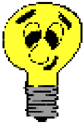
- $\sqrt{192} = \sqrt{64 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$;
- $\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4 \cdot x} = x^2\sqrt{x}$; $x \geq 0$



Unter die Wurzel ziehen

Ist bei einem Produkt ein Faktor eine Wurzel, so lässt sich das Produkt als Wurzel schreiben. Beispiele:

- $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$;
- $b\sqrt{b^4 + 9} = \sqrt{b^2(b^4 + 9)}$;$b \geq 0$
- $-3\sqrt{a+1} = -\sqrt{3^2(a+1)}$



1.3 Die n-te Wurzel

Die n-te Wurzel aus a ist die nicht negative Lösung der Gleichung

$$x^n = a \ (a \in \mathbb{R}_0^+).$$

$$x = \sqrt[n]{a} \quad n \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{R}_0^+,\ \text{da}\ x^n = a$$

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

Bsp: $2 = \sqrt[3]{8}$; *denn* $2^3 = 8$

Die Gleichung $x^3 = -8$ *hat die Lösung* $x = -2 = -\sqrt[3]{8}$.

1.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Für **positive** Basis a definiert man: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (p \in \mathbb{Z};\ q \in \mathbb{N})$

Rechnen mit n-ten Wurzeln durch Umformen in Potenzen:

Bsp: $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = \dfrac{1}{2^{\frac{3}{5}}} = 2^{-\frac{3}{5}}$

$$25^{\frac{3}{4}} = \left(5^2\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{6}{4}} = 5^{\frac{3}{2}} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

1.5 Binomische Formeln

Plus-Formel $\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Minus-Formel $\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Quadrat, doppeltes}\\ \text{Produkt, Quadrat}\end{array}\right.$

Plus-Minus-Formel $\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

1.6 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ nennt man **quadratische Gleichung** in x.

Lösung mit Hilfe der Lösungsformel

Für die Lösungen der quadratischen Gleichung gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck $b^2 - 4ac$ wird als **Diskriminante D** bezeichnet.

- $D > 0 \Rightarrow$ Gleichung besitzt genau zwei Lösungen
- $D = 0 \Rightarrow$ Gleichung besitzt genau eine Lösung
- $D < 0 \Rightarrow$ Gleichung besitzt keine Lösung

Bsp.: $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} \qquad L = \{-0{,}5;\ 2\}$$

1.7 Biquadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0;\ a \neq 0$ nennt man **biquadratische** Gleichung.

Bsp.: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Lösung durch die **Substitution:** $x^2 = u$

$u^2 + 2u - 3 = 0 \quad \rightarrow u_1 = 1;\ u_2 = -3$

Rücksubstitution: $x_{1/2}^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -1$

$x_{3/4}^2 = -3 \rightarrow$ keine Lösung für x

$L = \{-1;\ 1\}$

1.8 Lösung linearer Gleichungssysteme mit 3 Variablen

$$\begin{array}{lll} \text{I:} & 2x + 3y - z = -6 & |\cdot 1 \quad |\cdot 3 \\ \text{II:} & -x + y + 2z = 1 & |\cdot 2 \\ \text{III:} & 3x + 3y + z = -1 & \qquad\; |\cdot(-2) \end{array}$$

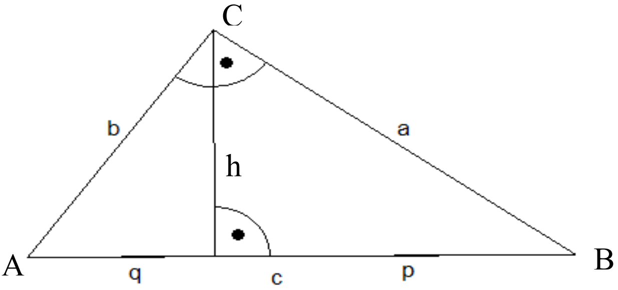
$$\begin{array}{lll} 1\cdot\text{I} + 2\cdot\text{II} = \text{I'} & 5y + 3z = -4 & |\cdot 3 \\ 3\cdot\text{I} + (-2)\,\text{III} = \text{II'} & 3y - 5z = -16 & |\cdot(-5) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 3\cdot\text{I'} + (-5)\cdot\text{II'} & 34z = 68 & \rightarrow z = 2 \\ \text{in I'} & 5y + 6 = -4 & \rightarrow y = -2 \\ \text{in I} & 2x + 3\cdot(-2) - 2 = -6 & \rightarrow x = 1 \end{array}$$

$$L = \{(1; -2; 2)\}$$

2 Geometrie

2.1 Die Satzgruppe des Pythagoras



Höhensatz: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

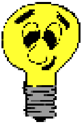
$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

Kathetensatz: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist jedes Kathetenquadrat flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$$\boxed{a^2 = c \cdot p \text{ bzw. } b^2 = c \cdot q}$$

Satz des Pythagoras: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat flächengleich der Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Merke: Der Kehrsatz ist ebenfalls gültig!

2.2 Das sollte man wissen!

- **Diagonale im Quadrat:** $a\sqrt{2}$
- **Raumdiagonale im Würfel:** $a\sqrt{3}$
- **Höhe im gleichseitigen Dreieck:** $\frac{a}{2}\sqrt{3}$
- **Entfernung der Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$:**

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

2.3 Sinus, Kosinus und Tangens

Im rechtwinkligen Dreieck (0° < α < 90°) gilt:

Sinus: $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Kosinus: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Tangens: $\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

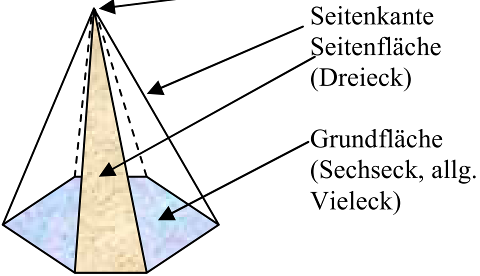
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Schreibweise: $\sin^2\alpha := (\sin\alpha)^2$

α	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosα	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

2.4 Die Pyramide

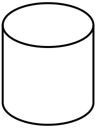
Bsp.: Sechsseitige Pyramide



Das Lot von der Spitze auf die Grundebene wird als Höhe bezeichnet.
Eine Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h hat den Rauminhalt $\boxed{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$.

Eine dreiseitige Pyramide, bei der alle Kanten gleich lang sind, heißt **Tetraeder**.

2.5 Zylinder



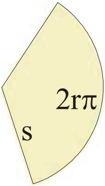
Volumen $\boxed{V = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h}$

Mantelfläche: $\boxed{M = U_k \cdot h = 2r\pi \cdot h}$

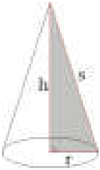
Oberfläche: $\boxed{O = M + 2G = 2r\pi \cdot h + 2r^2\pi}$

2.6 Kegel

Volumen: $V = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} r^2 \pi h$



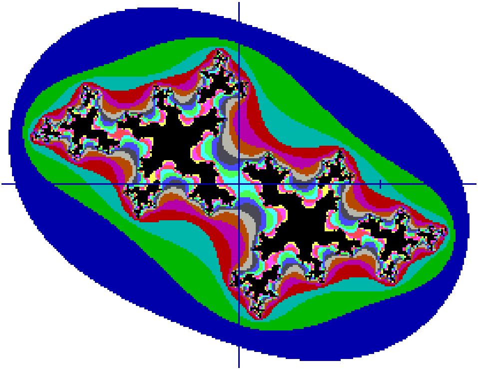
Die Mantelfläche ist ein Kreissektor mit dem Radius s (Mantellinie) und der Bogenlänge $2r\pi$.



Mantelfläche: $M = r\pi s$

Oberfläche: $O = M + G = r\pi s + r^2\pi$

außerdem gilt: $s^2 = r^2 + h^2$



3 Funktionen

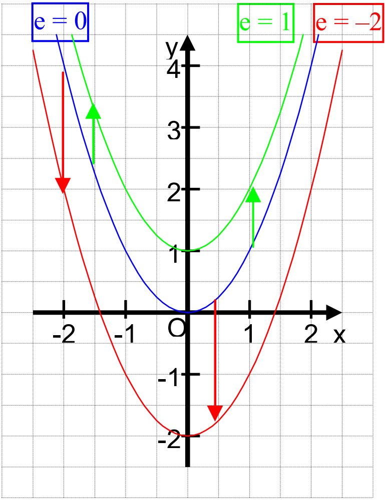
3.1 Die quadratische Funktion

Der Graph der quadratischen Funktion

$x \mapsto y$ mit $y = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt **Parabel**.

Verschiebung der Normalparabel

1. um e in y-Richtung
   $y = x^2 + e$



Normalparabel

$y = x^2$

S(0|0)

NST: $x = 0$

Normalparabel um 1 in y-Richtung verschoben

$y = x^2 + 1$

S(0|1)

NST: keine

Normalparabel um -2 in y-Richtung verschoben

$y = x^2 - 2$

S(0|–2)

NST: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

2. um d in x - Richtung
   $y = (x - d)^2$

Normalparabel um –1 in x-Richtung verschoben

$y = (x - (-1))^2 = (x + 1)^2$

S(–1|0)

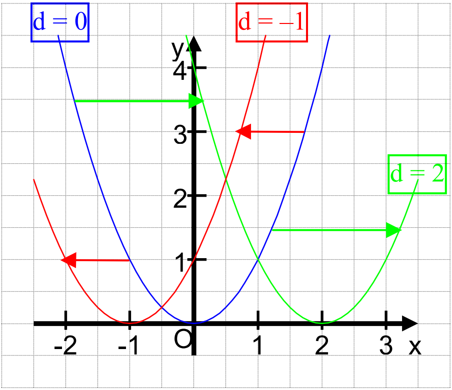
NST: $x = -1$

Normalparabel um 2 in x-Richtung verschoben

$y = (x - 2)^2$

S(2|0)

NST: $x = 2$



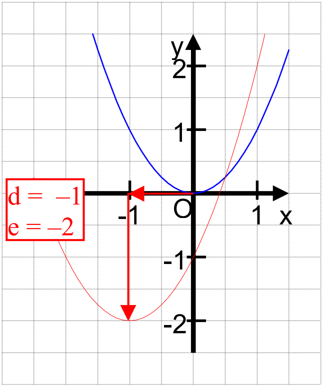
3. um d in x-Richtung und e in y-Richtung
   $y = (x - d)^2 + e$

Normalparabel um –1 in x-Richtung und –2 in y-Richtung verschoben

$y = (x + 1)^2 - 2$

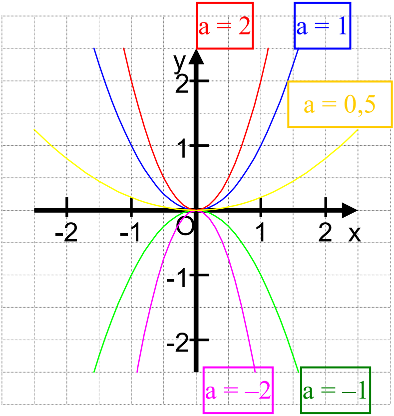
S(–1|–2)

NST: $x_1 = -1 - \sqrt{2}; x_2 = -1 + \sqrt{2}$



Streckung der Normalparabel

$y = ax^2$



Für $|a| > 1$ ist der Graph enger als die Normalparabel.

Für $-1 < a < 1$ ist der Graph weiter als die Normalparabel.

Allgemeine Parabel

Scheitel der allgemeinen Parabel $S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

NST: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, falls $b^2 - 4ac \geq 0$,

sonst keine.

Bsp.: $y = 2x^2 + 4x - 6$

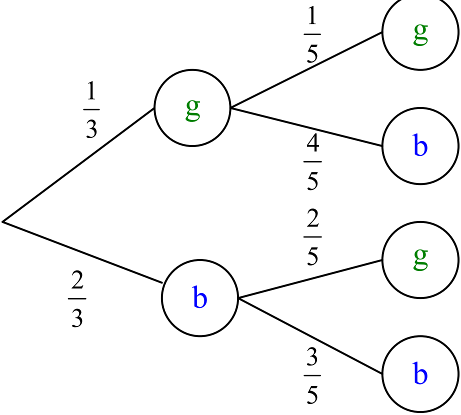
NST: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

$S(-1|f(-1) = -8) \Rightarrow y = 2[(x+1)^2] -8 = 2x^2 + 4x - 6$

4 Stochastik

4.1 Mehrstufige Zufallsexperimente

In einer Urne befinden sich 2 grüne und 4 blaue Kugeln. 2 werden ohne Zurücklegen gezogen.



$$P(gg) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(gb) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(bg) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(bb) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

Pfadregel 1: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad zu diesem Ereignis.

Pfadregel 2: Die **Summe** der Wahrscheinlichkeiten, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist gleich 1.

Bsp.:
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1;\quad \frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1;\quad \frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1;$$
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=1$$

Pfadregel 3: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

P(verschiedenfarbige Kugeln) = P(gb) + P(bg) = $\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$