1 Zahlen

Bruchterme sind z.B.: $\frac{x+2}{x-1}$; $\frac{a+2b}{3a}$; $\frac{1}{4a+5}$

1.1 Kürzen

In Faktoren zerlegen: $\frac{3x^2-3x}{3x^2(x+3)}=\frac{3x(x-1)}{3x\cdot x(x+3)}=$

Gemeinsame Faktoren kürzen: $\frac{x-1}{x(x+3)}$

1.2 Addieren und Subtrahieren

Bsp.: $\frac{1}{2x}+\frac{1,5}{x-2}$ D = $\mathbb{Q}\setminus\{0; 2\}$

Hauptnenner bestimmen: HN: $2x(x-2)$

Auf HN erweitern: $\frac{1\cdot(x-2)}{2x(x-2)}+\frac{1,5\cdot 2x}{(x-2)\cdot 2x}=$

Zähler zusammenfassen: $\frac{x-2+3x}{2x(x-2)}=\frac{4x-2}{2x(x-2)}=$

In Faktoren zerlegen und kürzen: $\frac{2(2x-1)}{2x(x-2)}=\frac{2x-1}{x(x-2)}$

1.3 Multiplizieren und Dividieren

Beispiele:

1. $\frac{x-3}{x}\cdot\frac{2}{x-3}=\frac{(x-3)\cdot 2}{x\cdot(x-3)}=\frac{2}{x}$ D = $\mathbb{Q}\setminus\{0; 3\}$

2. $\frac{x+1}{4} : \frac{3-x}{4} = \frac{x+1}{4} \cdot \frac{4}{3-x} = \frac{(x+1)\cdot 4}{4\cdot(3-x)} = \frac{x+1}{3-x}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

1.4 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

a) Gleichungen

Jede **lineare Gleichung** lässt sich auf die Form $ax + b = 0$ bringen.

Lösung der Gleichung ist die Nullstelle der Geraden $y = ax + b$.

b) Ungleichungen

Beispiele: $x > 2$; $2a < b$; $x+1 \geq 5$; $3 \leq a+2$

Die Lösungsmenge einer Ungleichung bleibt gleich, wenn man:

- auf beiden Seiten dieselbe rationale Zahl bzw. denselben Term addiert oder subtrahiert.
- beide Seiten mit einem **positivem** Term multipliziert oder durch diesen dividiert.
- beide Seiten mit einem **negativen** Term multipliziert oder durch diesen dividiert und *gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umdreht.*

Die **Lösungsmenge** einer Ungleichung wird entweder in aufzählender Form oder in Intervallschreibweise angegeben.

Beispiele:

$G = \mathbb{Z}$: $\quad x + 2 > 3 \quad$ $\mathbf{L} = \{2; 3; 4; \ldots\}$

$G = \mathbb{Q}$: $\quad x + 2 > 3 \quad$ $\mathbf{L} = \{x | x > 1\} =]1; \infty[$

Intervallarten:

]1; 4[„offenes Intervall von 1 bis 4“

[-2; 6] „geschlossenes Intervall von -2 bis 6“

[-4,5; ∞[„halboffenes Intervall von -4,5 bis unendlich“

c) Produktgleichungen und Produktungleichungen

Produktgleichung

Beispiel: $(x-3)(5+x)=0$ **L** = {-5; 3}

Ein Produkt besitzt den Wert Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

Produkt-Ungleichungen werden mit Tabellen gelöst:

Beispiel:

$$\left(\frac{1}{3}x-1\right)(4-x)\geq 0;$$

1.Faktor: $x_0 = 3;\ m > 0;$

2.Faktor: $x_0 = 4;\ m < 0;$

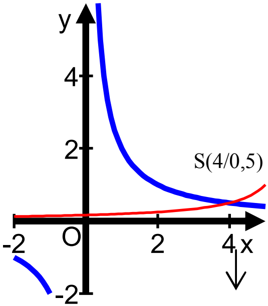
Vorzeichenverteilung:

		3		4	
$(\frac{1}{3}x-1)$	−		+		+
$(4-x)$	+		+		−
$(\frac{1}{3}x-1)(4-x)$	−		+		−

$L = [\,3;4\,]$

Lösen von Bruchgleichungen

Aufgabe: $\boxed{\frac{2}{x}} = \boxed{\frac{1}{6-x}}$



a) Grafische Lösung:

Zeichnen der beiden Graphen z.B. mit Hilfe einer Wertetabelle und ablesen der x-Koordinate des Schnittpunktes.

b) Rechnerische Lösung

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{6-x}$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$

Hauptnenner: $HN: x(6-x)$

beide Seiten mit HN multiplizieren: $\frac{2x(6-x)}{x} = \frac{x(6-x)}{6-x}$

Kürzen: $2(6-x) = x$

Ausrechnen: $x = 4$

Prüfe: $x \in \mathbf{D}$ dann $\mathbf{L} = \{4\}$

Notfalls noch Probe machen.

1.5 Lineare Gleichungssysteme

Beispiel: I. $2x + 4y = 8;$

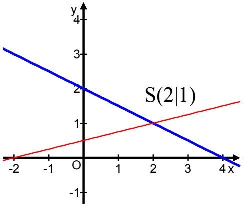
II. $\underline{x - 4y = -2;}$

a) Grafische Lösung

Auflösen der Gleichung (I) und (II) nach y; Geraden einzeichnen; Schnittpunkt ist die Lösung.

(I) $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2}$

(II) $\boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$



b) Additionsverfahren

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{I.} & 2x + 4y = 8; \\
 & \text{II.} & \underline{x - 4y = -2;} \\
\text{I. + II.} & & 3x = 6; \\
 & & x = 2; \\
\text{in I. eingesetzt:} & & y = 1;
\end{array}
$$

also: $\mathbf{L} = \{(2|1)\}$

c) Einsetzungsverfahren

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{I.} & 2x + 4y = 8; \\
 & \text{II.} & \underline{x - 4y = -2;} \\
\text{aus II.} & & x = -2 + 4y; \\
\text{in I.} & & 2\cdot(-2 + 4y) + 4y = 8; \\
\text{ausrechnen:} & & y = 1; \\
\text{in I. (oder II.)} & & x = 2;
\end{array}
$$

also: $\mathbf{L} = \{(2|1)\}$

d) Anzahl der Lösungen

- Genau eine Lösung (Die Geraden schneiden sich.)
- Keine Lösung (Die Geraden sind echt parallel.)
- Unendlich viele Lösungen (Die Geraden sind identisch.)

1.6 Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten

Potenzen: $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a\,;$ $\quad (a \in \mathbb{Q})$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}$ $\quad (a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$

Beachte: $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{Q}$

Gleitkommadarstellung: $150000 = 1{,}5 \cdot 10^{5}$

$0{,}00000036 = 3{,}6 \cdot 10^{-7}$

Potenzgesetze

Sei $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $p, q \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$a^{p} \cdot a^{q} = a^{p+q}$ (gleiche Basis)

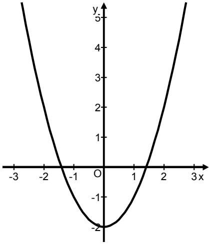
$a^{m} \cdot b^{m} = (ab)^{m}$ (gleicher Exponent)

$\left(a^{r}\right)^{s} = a^{rs}$ (Potenzieren einer Potenz)

2 Funktionen

Eine Zuordnung $x \mapsto y$, die jedem x aus dem Definitionsbereich genau ein y aus dem Wertebereich zuordnet, heißt **Funktion.**

Graphen von Funktionen werden von jeder Parallelen zur y-Achse höchstens einmal geschnitten.



Beispiel: $f : x \mapsto x^{2} - 2$

Definitionsmenge $D_f = \mathbb{Q}$

(Menge der x-Werte die in die Funktion eingesetzt werden dürfen)

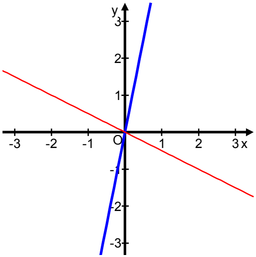
Wertemenge $W_f = [-2; \infty[$

(Menge der Werte die man durch einsetzen der x-Werte in die Funktion erhält)

2.1 Direkt proportionale Funktionen

Zwei einander zugeordnete Größen x und y für die $y = m \cdot x$ gilt ($m \in \mathbb{Q}$), heißen *direkt proportional* zueinander.

Der Quotient $\frac{y}{x} = m$ heißt **Proportionalitätsfaktor**.
Der Graph ist eine **Gerade** durch den Koordinatenursprung; er ergibt sich aus der Funktionsgleichung $y = m \cdot x$.
Beispiele: $y = 5x$ oder $y = -0{,}5x$



Der Faktor **m** legt die Steigung des Graphen fest und heißt daher auch **Steigungsfaktor**.

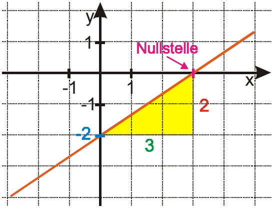
$m < 0$: Graph fallend
$m = 0$: Parallele zur x-Achse
$m > 0$: Graph steigend

2.2 Lineare Funktion

$f: x \mapsto m \cdot x + t$ mit $D = \mathbb{Q}$

Der Graph ist eine Gerade mit Steigung m und Achsenabschnitt t.
z.B.: $m = \frac{2}{3}$; $t = -2$;

$f: x \mapsto \frac{2}{3}x - 2$ mit $D = \mathbb{Q}$



Allgemein: Nullstelle: $x = -\frac{t}{m}$ Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$;

2.3 Geradengleichung

$y = mx + t$

- Je größer $|m|$ ist, desto steiler ist die Gerade.
- Für $m < 0$ **fällt**, für $m > 0$ **steigt** die Gerade.
- Alle Geraden mit gleicher Steigung sind **parallel**.

Gilt für die Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden g_1 und g_2:

$m_1 \cdot m_2 = -1$, so gilt: $g_1 \perp g_2$.

2.4 Besondere Geraden

$a \in \mathbb{Q}$

$y = ax$; Ursprungsgerade

$y = x$; Winkelhalbierende I. und III. Quadrant

$y = -x$; Winkelhalbierende II. und IV. Quadrant

$y = a$; Parallele zur x-Achse durch $(0|a)$

2.5 Punkt auf Geraden

Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen:

z.B.: $(4|5) \in g: y = 2x - 3$,

denn $\mathbf{5} = 2 \cdot \mathbf{4} - 3$.

2.6 Geradengleichung aus 2 Punkten aufstellen

z.B.: Gerade g durch $A(2|5)$ und $B(-2|4)$:

Steigung: $m = \frac{5-4}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$; also: $g: y = \frac{1}{4}x + t$

weil $A \in g$, muss gelten: $5 = \frac{1}{4} \cdot 2 + t$;

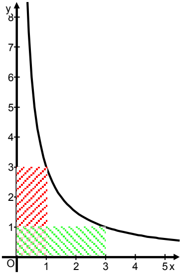
daraus bekommt man: $t = 4\frac{1}{2}$;

also: $y = \frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$ geht durch A und B.

2.7 Indirekt proportionale Funktionen

Zwei einander zugeordnete Größen x und y für die gilt: $x \cdot y = k$ (fester Wert) heißen *indirekt proportional* zueinander.
(**Produktgleichheit**)
Der Graph ist eine **Hyperbel**; er ergibt sich aus der Funktionsgleichung $y = \frac{k}{x}$.

Beispiel: $x \cdot y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$



2.8 Gebrochen-rationale Funktion

Beispiele: $f_1(x) = \frac{4}{x}$; $f_2(x) = \frac{2}{3-x} + 1$; $f_3(x) = \frac{3x-4}{2x^2+1{,}5}$

Die Definitionsmenge enthält diejenigen Werte der Grundmenge für die der Nenner ungleich Null ist.

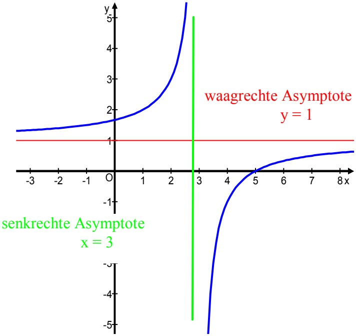
$$D_{f_1} = \mathbb{Q} \setminus \{0\};$$
$$D_{f_2} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}; \; D_{f_3} = \mathbb{Q}$$

Die Nullstellen des Nenners heißen **Definitionslücken**.

Beispiel:

$$\boxed{f_2(x) = \frac{2}{3-x} + 1;}$$

$D_{f_2} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

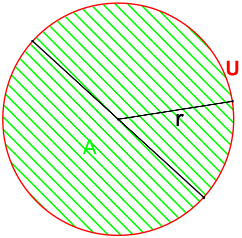


3 Geometrie

3.1 Der Kreis

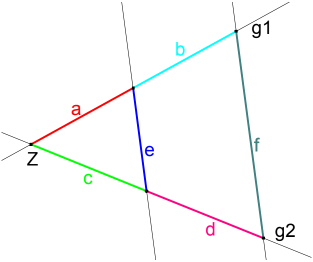
Der Kreis mit Radius r besitzt den Umfang: $\boxed{U = 2r\pi = d\pi}$ und

den Flächeninhalt: $\boxed{A = r^2\pi}$

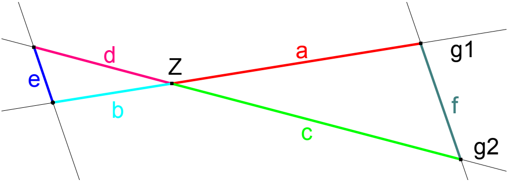


3.2 Der Strahlensatz

Voraussetzung: Zwei sich schneidende Geraden werden von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten.



$$\frac{f}{e}=\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \text{ und } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$



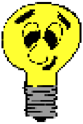
$$\frac{f}{e}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Strahlensatz:

- Je zwei Abschnitte auf g_1 verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf g_2.
- Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von Z aus gemessenen entsprechenden Abschnitte

auf g_1 (bzw. g_2).

Folgerungen:



- In jedem Dreieck ist die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.
- In jedem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden im Schwerpunkt S. Dabei teilt S jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1. (Die längere Strecke ist die Strecke vom Eckpunkt zum Schwerpunkt.)

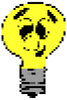
3.3 Ähnlichkeitssätze

W:W-Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

S:S:S-Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen.

S:W:S-Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

S:s:W-Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.



Schreibweise: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Umkehrung: Sind zwei Dreiecke ähnlich, so stimmen sie in den Winkeln überein und die Verhältnisse entsprechender Seiten sind gleich.

4 Stochastik

4.1 Ergebnisraum

Ein Experiment, dessen Ausgang nicht vorhersagbar ist, nennt man **Zufallsexperiment**. Den Ausgang des Experiments nennt man **Ergebnis**. Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man im **Ergebnisraum Ω** zusammen.

Beispiele:

1. Einmaliges Werfen eines Würfels:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

2. Werfen einer 1€- und einer 2€-Münze:

$$\Omega = \{WW; WZ; ZW; ZZ\}$$

4.2 Das Ereignis

Kein, ein oder mehrere Ergebnisse fasst man zu einem **Ereignis E** zusammen. Einelementige Ereignisse werden als **Elementarereignis** bezeichnet.

Beispiele:

E_1: „Genau einmal Zahl“: $E_1 = \{WZ; ZW\}$

E_2: „Zweimal Zahl“: $E_2 = \{ZZ\}$ (Elementarereignis)

Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ tritt ein, wenn E nicht eintritt.

E_1: „Genau einmal Zahl“

$\overline{E}_1$: „Beide Münzen gleich“: $\overline{E}_1 = \{WW; ZZ\}$

<u>Sonderfälle</u>:

Für das **sichere Ereignis** gilt: $E = \Omega$

Für das **unmögliche Ereignis** gilt: $E = \{\ \}$

Treten die Ereignisse E_1 **oder** E_2 ein, so erhält man das Ereignis

$$E_1 \cup E_2 = \{WZ; ZW; ZZ\} \text{ („}E_1\text{ vereinigt mit }E_2\text{“)}$$

4.3 Laplacewahrscheinlichkeit

Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Elementarereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt, heißen **Laplaceexperimente**.

Sei $|A|$ die Mächtigkeit des Ereignisses A (Anzahl der Elemente von A) und $|\Omega|$ die Mächtigkeit von Ω.

Dann gilt für Laplaceexperimente:

$$P(E) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{"Anzahl der günstigen Elementarereignisse"}}{\text{"Anzahl der möglichen Elementarereignisse"}}$$

Beispiel:

„Werfen einer 1€-und einer 2€-Münze“

E: „Genau einmal Zahl“ $\qquad \Omega = \{WW; \underline{WZ}; \underline{ZW}; ZZ\}$

$$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(\overline{E}) = 1 - P(E) \\ P(\{\ \}) = 0 \\ P(\Omega) = 1 \end{array}}$$