1 Zahlen und Funktionen

1.1 Variablen

Variablen sind Platzhalter für Zahlen aus einer vorgegebenen Grundmenge. *Bsp.:* $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ *oder* $x \in \mathbb{Q}$

Betrag einer Variablen

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$$

Bsp.: $|7| = 7$; $|-5| = -(-5) = 5$

1.2 Terme

Terme sind Rechenausdrücke, die aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen.

Tritt dieselbe Variable mehrmals in einem Term auf, so muss sie jeweils mit derselben Zahl belegt werden.

Bsp.: $T(x) = x^2 - 3x \quad T(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2 \quad T(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 4$

Zwei Terme T_1 und T_2, die bei jeder Belegung der Variablen mit Zahlen aus der Grundmenge jeweils den gleichen Wert annehmen, heißen **äquivalent** (gleichwertig).

Bsp.: $T_1(a) = 2a + 2(a-2) = 4(a-1) = T_2(a)$

Termumformungen nach den Rechengesetzen (KG, AG, DG, Klammerregeln) liefern **äquivalente Terme**.

Bsp.: $a + b^2 - (3a + 5b^2) = a + b^2 - 3a - 5b^2 = -2a - 4b^2$

$3x^2 + 7y^3 - (5x)^2 - 4y^2 = 3x^2 + 7y^3 - 25x^2 - 4y^2 = -22x^2 + 7y^3 - 4y^2$

Auflösen von Klammern

Steht vor der Klammer ein Pluszeichen, kann die Klammer weggelassen werden.

Bsp.: $3x + (4x - 3a) = 3x + 4x - 3a = 7x - 3a$

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen, werden beim Auflösen alle Zeichen in der Klammer umgekehrt. ($+ \leftrightarrow -$)

Bsp.: $3x - (4x - 3a) = 3x - 4x + 3a = -x + 3a$

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit allen Summanden der zweiten Klammer multipliziert und die Produkte addiert.

$$\boxed{(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

$(2x + 3y)(3 - 4x) = 6x - 8x^2 + 9y - 12xy$

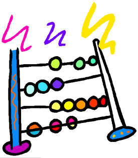
Faktorisieren

Beim Ausklammern werden gleiche Faktoren vor die Klammer gesetzt.

$-4a + 4b = -4(a - b)$

$ac + bc - ad - bd = c(a + b) - d(a + b) = (a + b)(c - d)$

$e^2x - ex + 3e^2y - 3ey = x(e^2 - e) + 3y(e^2 - e) = (e^2 - e)(x + 3y) = e(e - 1)(x + 3y)$

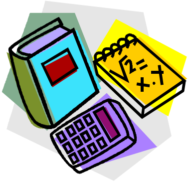


1.3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Eine **Gleichung** heißt **linear**, wenn die Variable in der ersten Potenz vorkommt.

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man **auf beiden Seiten** denselben Term addiert (subtrahiert) oder auf beiden Seiten mit demselben Term $\neq 0$ multipliziert (dividiert). Solche Umformungen sind **Äquivalenzumformungen**.

$$\begin{aligned} 5 - 0{,}5x &= 3 + 0{,}75x && \mid +0{,}5x \\ 5 &= 3 + 1{,}25x && \mid -3 \\ 2 &= 1{,}25x && \mid :1{,}25 \\ x &= 1{,}6 && \\ L &= \{1{,}6\} && \text{falls } G = \mathbb{Q} \\ L &= \{\ \} && \text{falls } G = \mathbb{N} \end{aligned}$$



Eine lineare Gleichung hat entweder **genau eine** Zahl oder **keine** Zahl oder **alle Zahlen** der Grundmenge als Lösung.

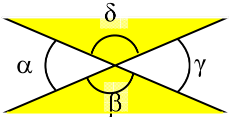
Bei **Ungleichungen** wird das Ungleichheitszeichen umgekehrt, wenn auf beiden Seiten mit einem negativen Term multipliziert (dividiert) wird oder der Kehrwert gebildet wird.

$$-5x > 2 \Leftrightarrow x < -\tfrac{2}{5}$$

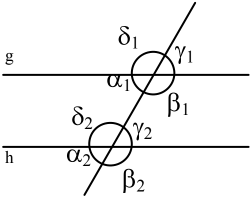
$$5 > 3 \Leftrightarrow \tfrac{1}{5} < \tfrac{1}{3}$$

2 Geometrie

2.1 Winkel



α und β bzw. γ und δ heißen **Nebenwinkel**, sie ergeben zusammen stets 180^0. α und γ bzw. β und δ heißen **Scheitelwinkel**. Sie sind gleich groß.



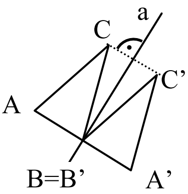
Die Winkelpaare α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 sowie δ_1 und δ_2 heißen **Stufenwinkel.**

α_1 und γ_2, β_1 und δ_2, γ_1 und α_2 sowie δ_1 und β_2 heißen **Wechselwinkel**.

Stufen- und Wechselwinkel sind **genau dann gleich groß, wenn die Geraden g und h parallel sind.**

2.2 Spiegelungen

Achsenspiegelungen P $\xrightarrow{a}$ P'



Abbildungsvorschrift der Achsenspiegelung:
Bei gegebener Achse a wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P' auf folgende Weise zugeordnet:

- Falls P $\notin$ a, liegt P' so, dass [PP'] von der Achse a rechtwinklig halbiert wird.

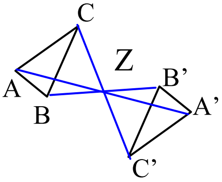
- Falls $P \in a$ ist, gilt $P = P'$

Nur die Achsenpunkte sind Fixpunkte. Die Spiegelachse und alle senkrecht zu ihr verlaufenden Geraden sind Fixgeraden.

Achsenspiegelungen sind **geraden-**, **längen-** und **winkeltreu**. Der Umlaufsinn **ändert sich**.

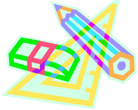
Punktspiegelungen $P \xrightarrow{Z} P'$

Abbildungsvorschrift der Punktspiegelung:
Bei gegebenem Zentrum Z wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P' auf folgende Weise zugeordnet:



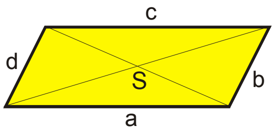
- Für $P \neq Z$ liegt P' so, dass $P' \in PZ$ und $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$
- Für $P = Z$ ist $P' = Z$.

Z ist der einzige Fixpunkt der Punktspiegelung. Alle Geraden durch Z sind Fixgeraden.
Punktspiegelungen sind **geraden-, längen-** und **winkeltreu**. Der Umlaufsinn **bleibt erhalten**.
Jede Punktspiegelung kann durch zwei Achsenspiegelungen an zueinander senkrechten Geraden mit Schnittpunkt Z ersetzt werden.



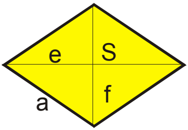
2.3 Symmetrische Vierecke

Parallelogramm



- $a \parallel c \wedge b \parallel d$
- $a = c \wedge b = d$
- punktsymmetrisch bzgl. S
- Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.
- Diagonalen halbieren sich gegenseitig.

Raute

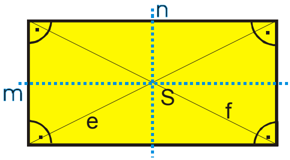


- Parallelogramm

Zusätzlich:

- vier gleichlange Seiten a
- Achsensymmetrie bzgl. e und f
- $e \perp f$
- e und f sind Winkelhalbierende.

Rechteck



- Parallelogramm

Zusätzlich:

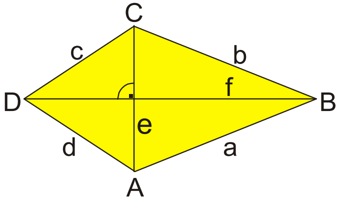
- $e = f$
- Achsensymmetrie bzgl. m und n

Quadrat

Hat alle Eigenschaften von Rechteck und Raute gleichzeitig.

Drachenviereck

- $c = d \wedge a = b$
- Symmetrieachse BD
- $e \perp f$
- f halbiert e
- f ist Winkelhalbierende



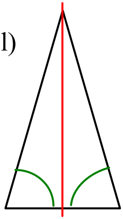
2.4 Besondere Dreiecke

Das **gleichschenklige** Dreieck

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten (Schenkel) heißt gleichschenklig. Die dritte Seite heißt Basis.

Jede der folgenden Aussagen ist gleichwertig:

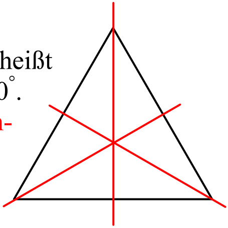
- Das Dreieck ist gleichschenklig.
- Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
- Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel.



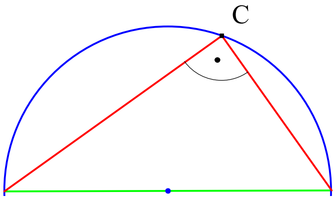
Das **gleichseitige** Dreieck

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt gleichseitig. Seine Winkel betragen jeweils 60°.

Alle drei Mittelsenkrechten sind auch Symmetrieachsen.



Das **rechtwinklige** Dreieck



Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn C auf dem **Thaleskreis** über [AB] liegt.

Die Seiten, die am rechten Winkel anliegen, heißen **Katheten**, die gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse**.

2.5 Kongruenz

Kongruenzabbildungen

Figuren A und B, die durch Achsenspiegelungen aufeinander abgebildet werden können, heißen **kongruent** oder deckungsgleich. **A ≅ B**.

Kongruenzsätze für Dreiecke

SSS: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen.

SWS: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

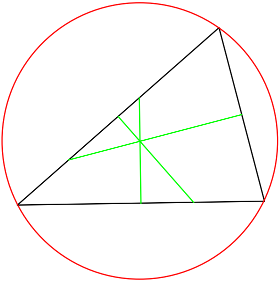
WSW: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

SsW: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

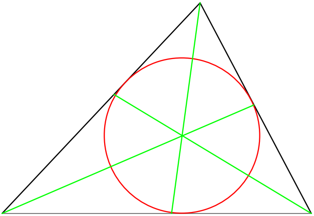
In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

2.6 Dreieckstransversalen

Jedes Dreieck besitzt einen **Umkreis**. Sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt der **Mittelsenkrechten**.



Jedes Dreieck besitzt einen **Inkreis**. Sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt der **Winkelhalbierenden**.



In jedem Dreieck schneiden sich die **Höhen** in genau einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt.

Verbindet man in einem Dreieck einen Eckpunkt mit der gegenüberliegenden Seitenmitte, so entsteht eine **Seitenhalbierende**.

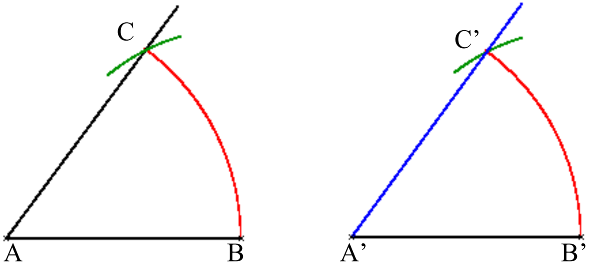
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im **Schwerpunkt** des Dreiecks. Sie heißen deshalb auch **Schwerlinien**.

2.7 Konstruktionen

Für das Erstellen der Konstruktionen gilt die Farbfolge schwarz, rot, grün, blau.

Winkelübertragung

Gegeben: Winkel BAC

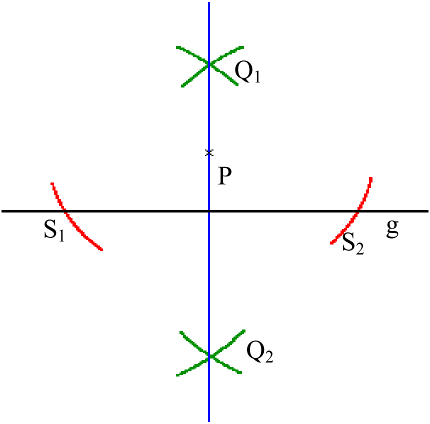


1. $k(A; \overline{AB})$
2. $k(A'; \overline{AB})$
3. $k(B'; \overline{BC}) \cap k(A'; \overline{AB}) = \{C'\}$ (Sehne übertragen)
4. [A'C' ist der zweite Schenkel

Lot zu g durch P

Gegeben: g und P

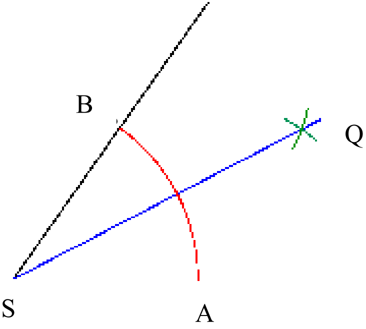
1. $k(P;r) \cap g = \{S_1; S_2\}$
2. $k(S_1;r') \cap k(S_2;r') = \{Q_1; Q_2\}$
3. Q_1Q_2 ist das Lot zu g durch P



Winkelhalbierende

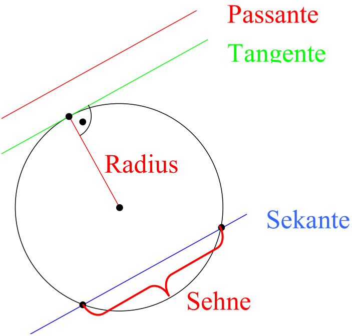
Gegeben: Winkel ASB

1. $k(S;r) \rightarrow$ A und B
2. $k(A;r) \cap k(B;r) = \{Q\}$
3. [SQ ist die Winkelhalbierende von Winkel ASB



2.8 Tangente

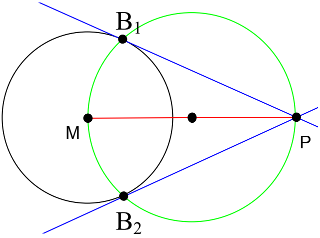
Die Tangente steht senkrecht auf dem Radius.



Konstruktion der Tangente

Gegeben: k(M;r) und P

1. K(M;r) $\cap$ Thaleskreis über [MP] = $\{B_1; B_2\}$
2. B_1P = Tangente 1
3. B_2P = Tangente 2



3 Stochastik

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Arithmetisches Mittel}\\ \textit{Durchschnittswert}\end{array}\right\} = \frac{\textit{Summe der Einzelwerte}}{\textit{Anzahl der Einzelwerte}}$$

Bsp.: mündliche Noten: 2, 1, 3, 2, 1

$$\textit{Durchschnittswert} = \frac{2+1+3+2+1}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$