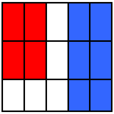
1 Zahlen

1.1 Bruchteile und Bruchzahlen

Bruchteile von Ganzen lassen sich mit Hilfe von Bruchzahlen angeben. Z.B.

Rot: $\frac{4}{15}$

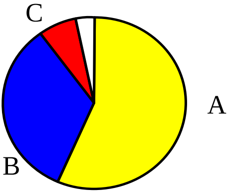
Blau: $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$



Nenner = Anzahl der gleichen Teile des Ganzen;
Zähler = Anzahl der markierten Teile

Kreisdiagramm: Beispiel Klassensprecherwahl

Kandidat	A	B	C	Ungültig
Stimmenzahl	17	10	2	1
Anteil	$\frac{17}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$
Mittelpunktswinkel	204°	120°	24°	12°



Anteile gibt man häufig in **Prozent (%)** an: z. B. $\frac{7}{100} = 7\%$;

Brüche haben die Form $\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. z heißt der **Zähler**, n der **Nenner** des Bruches.

Bedingung	Bezeichnung
z > n	Unechter Bruch
z < n	Echter Bruch
z = 1	Stammbruch
z ist Vielfaches von n oder Null	Scheinbruch

Unechte Brüche kann man in **gemischte Zahlen** umwandeln.

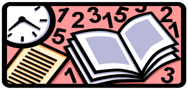
Bsp.: $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$.

Zu jeder Bruchzahl gehören unendlich viele verschiedene Brüche.

Bsp.: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ ....

Die Menge der positiven und negativen Bruchzahlen bilden mit der Zahl 0 die **Menge der rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$. ($\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

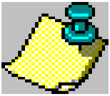
Z. B. $4 \in \mathbb{Q}$, $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$



Es gilt: $z : n = \frac{z}{n}$.

1.2 Formänderung von Brüchen

a) **Erweitern** eines Bruches bedeutet: Zähler und Nenner werden mit derselben natürlichen Zahl multipliziert.



$\frac{z}{n} = \frac{z \cdot k}{n \cdot k}$, $k \in \mathbb{N}$ *Bsp.:* $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$

b) **Kürzen** eines Bruches bedeutet: Zähler und Nenner werden durch einen gemeinsamen Teiler k dividiert.

$\frac{z}{n} = \frac{z:k}{n:k}$, $k \in \mathbb{N}$ *Bsp.:* $\frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$

Einen Bruch, den man nicht mehr kürzen kann, nennt man **vollständig gekürzt** (= **Grundform** des Bruches).

1.3 Anordnung der Bruchzahlen

Von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige der größere, der den kleineren Nenner hat. *Bsp.:* $\frac{4}{9} < \frac{4}{7}$

Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige der größere, der den größeren Zähler hat. *Bsp.:* $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$

Brüche mit verschiedenen Nennern bringt man vor dem Vergleichen auf den **Hauptnenner** (= kgV aller Nenner).

1.4 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Regel: Zähler addieren (subtrahieren) und den Nenner beibehalten.

Bsp.: $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$, $\frac{7}{13} - \frac{3}{13} = \frac{4}{13}$

Brüche mit verschiedenen Nennern erweitert man zuerst auf den **Hauptnenner**.

Bsp.: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$

1.5 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Regel: **Zähler mal Zähler , Nenner mal Nenner. Vorher kürzen!**

Bsp.: $\frac{3}{8}\cdot\frac{12}{9}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$

Gemischte Zahlen vor dem Multiplizieren in unechte Brüche verwandeln!

Regel: Bruch : Bruch = Bruch · Kehrbruch (Vorher kürzen!)

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ *Bsp.:* $\frac{3}{14}:\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 7}{14\cdot 6}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$

1.6 Bruchteil eines Bruches

Das Wort "von" wird nach einem Bruch durch „ · " ersetzt.

Bsp.: $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{8}$ kg $=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$ kg $=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 4}$ kg $=\frac{3}{20}$ kg

1.7 Dezimalzahlen

Kommazahlen wie z.B. 1,356 heißen **Dezimalzahlen.** .Die Ziffern hinter dem Komma heißen **Dezimalen.**

H	Z	E	,	z	h	t
		1	,	3	5	6

z = Zehntel, h = Hundertstel,
t = Tausendstel usw.

Bsp.: $0{,}04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$; $1{,}234=1\frac{234}{1000}=1\frac{117}{500}$

1.8 Ordnen von Dezimalzahlen nach der Größe

Von zwei Dezimalzahlen ist diejenige die größere, die von links nach rechts gelesen an entsprechender Stelle zuerst eine höhere Ziffer hat.

Bsp.: $1{,}2345 < 1{,}2346$

1.9 Runden von Dezimalzahlen

Ist die erste wegzulassende Ziffer 0 ,1, 2, 3, 4, so wird abgerundet, ist sie 5, 6, 7, 8, 9, so wird aufgerundet. Bsp.

Runden auf	1 Dez.	2 Dez.	3 Dez.
3,4564	≈3,5	≈3,46	≈3,456

1.10 Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

Regel: Addition (Subtraktion) der Stellen gleichen Wertes

Bsp.: $3{,}76 + 4{,}32 = 8{,}08$

1.11 Multiplikation und Division mit Stufenzahlen

Regel: Verschieben des Kommas um so viele Stellen nach rechts (links), wie die Stufenzahl Nullen hat.

Bsp.: $2{,}04 \cdot 1000 = 2040$; $14{,}73 : 100 = 0{,}1473$

1.12 Multiplikation und Division von Dezimalzahlen

Die Kommata bleiben beim **Multiplizieren** zunächst unberücksichtigt.

Das Ergebnis erhält so viele Dezimalen, wie die Faktoren zusammen haben.

z.B.: 1,86 · 0,54 = 1,0044

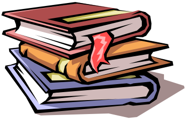
Beim **Dividieren durch eine natürliche Zahl** wird vor dem Herabholen der 1. Ziffer hinter dem Komma im Ergebnis das Komma gesetzt.

Bsp.: 9,2 : 8 = 1,15

Beim **Dividieren** ändert sich der Quotientenwert nicht, wenn man bei beiden Zahlen das Komma um gleich viele Stellen in gleicher Richtung verschiebt (=**gleichsinnige Kommaverschiebung**).

Das Komma wird beim Divisor so weit verschoben, bis er eine natürliche Zahl ist. *Bsp.:* 2,56 : 1,6 = 25,6: 16 = 1,6

1.13 Umformen eines Bruches in eine Dezimalzahl und umgekehrt



Bruch → Dezimalzahl

$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}}$ **= z:n =** ergibt eine

- ➢ **endliche Dezimalzahl**, wenn der Nenner des vollständig gekürzten Bruches **nur** die Primfaktoren 2 oder 5 enthält.
- ➢ **unendliche periodische Dezimalzahl** sonst.

Die sich wiederholende Ziffernfolge heißt **Periode.**

Periodische Dezimalzahl → Bruch

Falls die Periode direkt hinter dem Komma beginnt:

Zähler = Periode ,

in den Nenner schreibt man so viele Neunen, wie die Periode Ziffern hat.

Bsp.: $1,\overline{23} = 1\frac{23}{99}$

1.14 Rechnen mit rationalen Zahlen

Die Rechengesetze für die ganzen Zahlen gelten auch für die rationalen Zahlen.

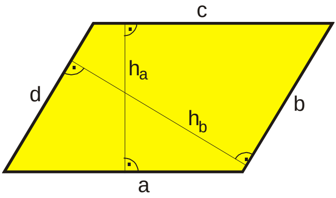
z. B. **Multiplikation und Division**

$(+\ 1{,}2) \cdot (+\ 0{,}1) = +\ 0{,}12$	$(+\ 1{,}2) : (+\ 0{,}1) = +\ 12$
$(-\ 1{,}2) \cdot (+\ 0{,}1) = -\ 0{,}12$	$(-\ 1{,}2) : (+\ 0{,}1) = -12$
$(-\ 1{,}2) \cdot (-\ 0{,}1) = +\ 0{,}12$	$(-\ 1{,}2) : (-\ 0{,}1) = +\ 12$ usw.

2 Geometrie

2.1 Flächeninhalte von Parallelogramm, Dreieck und Trapez

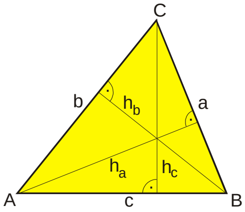
Parallelogramm:



$A_P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

A = Grundlinie mal zugehörige Höhe

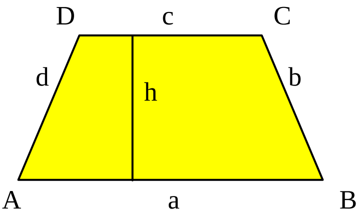
Dreieck:



$$A_D = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \ ;$$

A = Halbe Grundlinie mal zugehörige Höhe

Trapez:



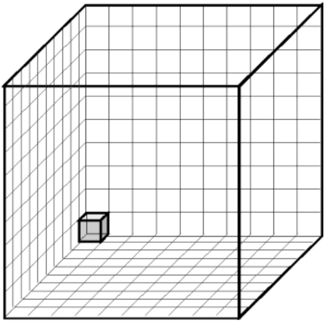
$$A_T = \tfrac{1}{2}\ (a + c) \cdot h$$

A = Halbe Summe der parallelen Seitenlängen mal Höhe

2.2 Körper und ihr Volumen

a) Volumeneinheiten

Hat ein Würfel die Kantenlänge,	so ist sein Volumen
1mm	$1mm^3$
1cm	$1cm^3 = 1ml$
1dm	$1dm^3 = 1l$
1m	$1m^3$



Umrechnungen

$mm^3 \rightarrow cm^3 \rightarrow dm^3 \rightarrow m^3$

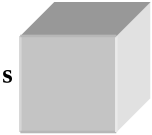
Umrechnungszahl 1000

b) Das Volumen von Quader und Würfel

$$\boxed{V_Q = l \cdot b \cdot h}$$

l = Länge, b = Breite, h = Höhe

$$\boxed{V_w = s^3}$$



s = Seitenlänge

3 Funktionen

Bei einer Zuordnung wird jeder Zahl (aus einer Menge von Zahlen) eine weitere Zahl zugeordnet.
Beschreibungsmöglichkeiten: Tabelle, Graph, Vorschrift

3.1 Direkte Proportionalität

Bei einer **direkten Proportionalität** wird dem doppelten, dreifachen,...Wert der einen Größe, das doppelte, dreifache,... der anderen Größe zugeordnet.
Bsp.: Liter Benzin $\mapsto$ *Preis in €*

3.2 Schlussrechnung (Dreisatz):

Bsp.: 7 l Benzin kosten 9,80 €. Wie viel kosten 20 l?

$$7\text{ l} \mapsto 9{,}80\text{ €}$$

$$1\text{ l} \mapsto 9{,}80\text{ €} : 7 = 1{,}40\text{ €}$$

$$20\text{ l} \mapsto 1{,}40\text{ €} \cdot 20 = 28{,}00\text{ €}$$

3.3 Prozentrechnung

Prozent = Hundertstel

Bsp.: $5\% = \begin{cases} \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \\ 0{,}05 \end{cases}$ $\quad 25\% = \begin{cases} \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ 0{,}25 \end{cases}$

Prozentsatz, Grundwert, Prozentwert

$$p\,\% = \frac{p}{100}$$

Es gilt: p % von G = P

p % **= Prozentsatz**, G **= Grundwert,** P = **Prozentwert**

Dem Grundwert werden immer 100% zugeordnet.

Prozentsatz und Prozentwert sind zueinander direkt proportional.

Beispiele:

Eine Ware kostet 50,00 € und wird um 16% verteuert. 100% $\mapsto$ 50,00 € 1% $\mapsto$ 50,00€ : 100 = 0,5 € 116% $\mapsto$ 0,5 € · 116 = 58,00 €	Eine Ware kostet 58,00 € und wird um 16% verbilligt. 100% $\mapsto$ 58,00 € 1% $\mapsto$ 58,00€ : 100 = 0,58 € 84% $\mapsto$ 0,58 € · 84 = 48,72 €

Eine Ware wird von 50 € auf 58 € verteuert. 50 € $\mapsto$ 100% 1 € $\mapsto$ 100% : 50 = 2% 8 € $\mapsto$ 2% · 8 = 16%

3.4 Zinsrechnung

Zins Z = Leihgebühr in €

Kapital K = ausgeliehener Geldbetrag
Zinssatz p % = Leihgebühr in %

Zinsformel: $Z = \frac{t}{360} \cdot \frac{p}{100} \cdot K$

1 Zinsjahr = 360 Tage, 1 Zinsmonat = 30 Tage

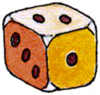
4 Stochastik

4.1 Zufallsexperimente

Experimente wie z. B. das Werfen eines Spielwürfels oder einer Münze, das Drehen eines Glücksrades usw., deren Ergebnis vom Zufall abhängt, nennt man **Zufallsexperimente.**

4.2 Relative Häufigkeit

Bsp. : Wirft man einen Würfel 100 mal und tritt dabei die Augenzahl fünf 13 mal ein, so sagt man die **absolute Häufigkeit** der „Augenzahl fünf" ist 13, die **relative Häufigkeit** ist $\frac{13}{100}$.



$$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$$

Empirisches Gesetz der großen Zahlen: Wird ein Zufallsexperiment sehr oft ausgeführt, dann stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines einzelnen Ergebnisses um eine bestimmte Bruchzahl.